Elastisk energi, dissipation og konstitutive ligninger

Rathkjen, Arne

Publication date:
2003

Document Version
Tidlig version også kaldt pre-print

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK
DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

TEAM 2003.1

A. RATHKJEN
ELASTISK ENERGI, DISSIPATION OG
KONSTITUTIVE LIGNINGER
SEPTEMBER 2003
ISSN 1395-7953 R0304

TEAM

A. RATHKJEN

2003.1

ELASTISK ENERGI, DISSIPATION OG KONSTITUTIVE LIGNINGER

SEPTEMBER 2003

ISSN 1395-7953 R0304

Elastisk energi, dissipation og konstitutive ligninger

Når et legeme tilføres energi alene i form af mekanisk og termisk energi, har man *effekt-ligningen*

$$\dot{W}_y = \dot{K} + \dot{W}_i \tag{1}$$

hvor

$$\dot{W}_y = \int_a \overline{\sigma} \cdot \overline{v} da + \int_v \rho \overline{b} \cdot \overline{v} dv \qquad \text{er de ydre kræfters effekt}$$

$$\dot{K} = \int_v \rho \overline{a} \cdot \overline{v} dv \qquad \text{er den materielle tidsafledede af den kinetiske energi}$$

$$K = \frac{1}{2} \int v \rho \overline{v} \cdot \overline{v} dv$$

$$\dot{W}_i = \int_v \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} dv \qquad \text{er de indre kræfters effekt}$$

se afsnit 16.1 i [1].

Med betegnelserne A for den oplagrede *elastiske energi* og D for *dissipationen* har man den konstitutive ligning

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \dot{A} + \dot{D} \tag{2}$$

hvor $\underset{\sim}{\sigma}$ er Canchys spændingstensor, og $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}$ er tøjningshastighedstensoren. Den elastiske energi A er en non-negativ størrelse, og den afledede $\dot{A}$ er positiv, når der udføres arbejde på legemet, mens $\dot{A}$ er negativ, når legemet udfører arbejde på omgivelserne. Dissipationen D er ligeledes en non-negativ størrelse, men her gælder, at den afledede, dissipationshastigheden $\dot{D}$, er non-negativ, hvad enten der udføres arbejde på eller af legemet.

For et legeme, som består af et dissipativt materiale, gælder, at kun en del af det på legemet udførte arbejde W_y oplagres som mekanisk energi (A og K), mens resten bliver til termisk energi (D). Der forekommer en varmeproduktion, og man har

$$\dot{D} = \rho r \tag{3}$$

hvor r er *den specifikke varmeproduktion.*

Den totale energi i legemet bestemmes ved

$$\dot{E}_{total} = \dot{K} + \dot{A} + (\dot{D} = \rho r) - div\overline{q}$$

når den eneste varmeproduktion hidrører fra dissipation. Her er $\overline{q}$ varmestrømvektoren, positiv bort fra legemet.

Som eksempler på udtryk for den elastiske energi A og dissipationshastigheden $\dot{D}$ kan anføres:

$$A = \sigma^2/2E \quad , \quad \dot{D} = \sigma^2/\eta \tag{4}$$

for et Maxwell materiale,

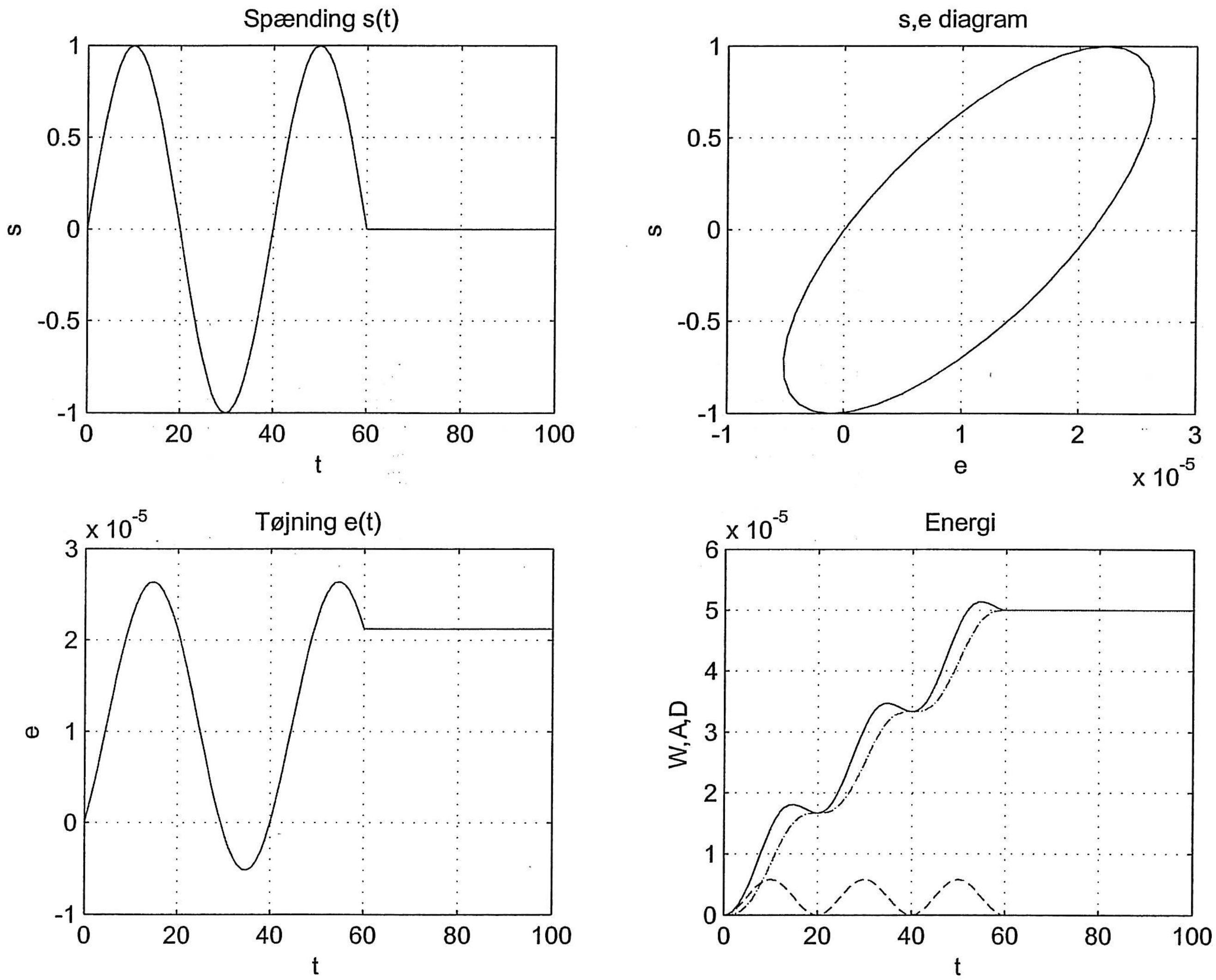
$$A = E\varepsilon^2/2 \quad , \quad \dot{D} = \eta\dot{\varepsilon}^2 \tag{5}$$

for et Kelvin-Voigt materiale og

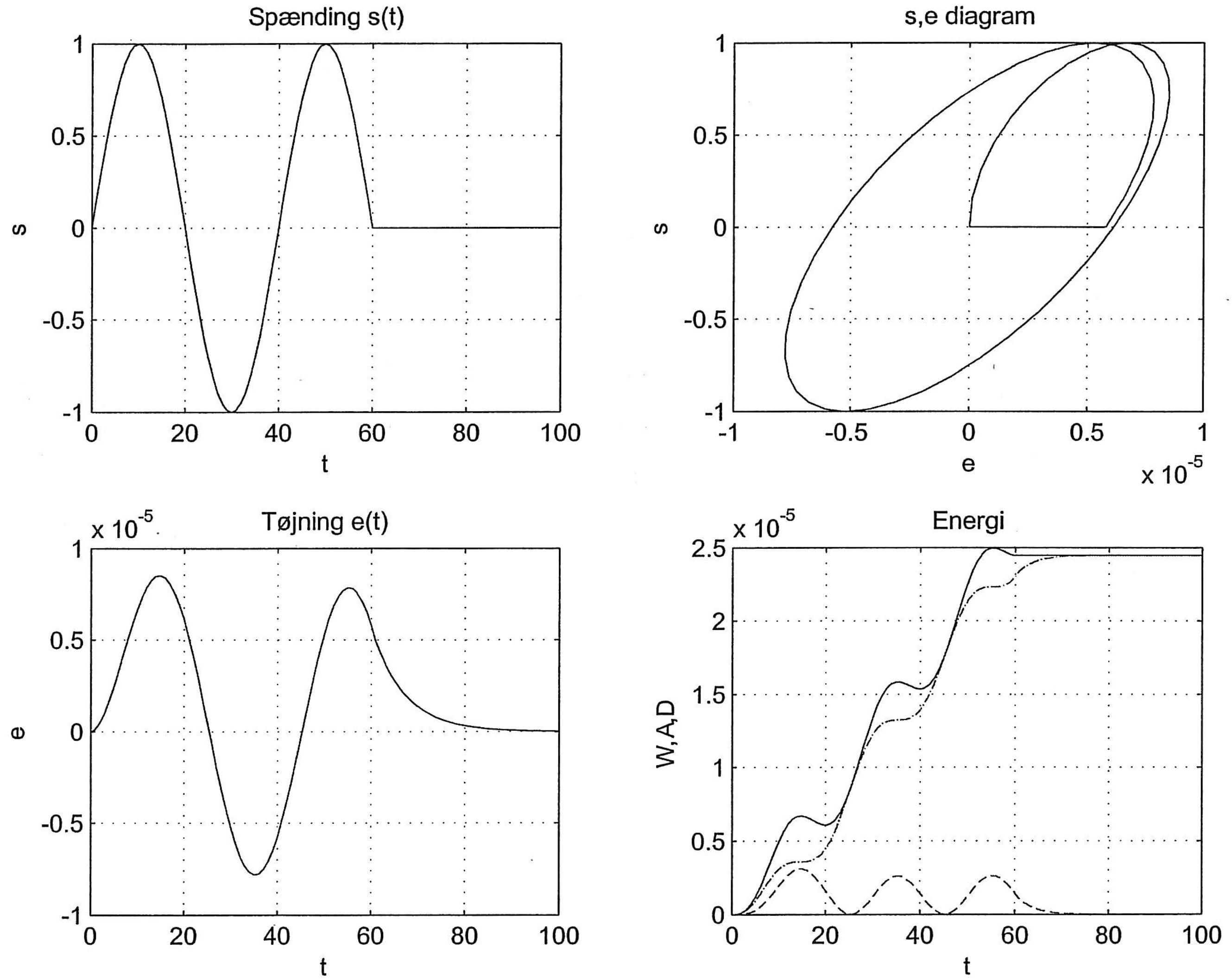
$$\begin{aligned} A &= \sigma^2/2E_1 + (\sigma - \eta_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}/E_1 - \sigma/\eta_1))^2/2E_2 \\ \dot{D} &= \sigma^2/\eta_1 + \eta_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}/E_1 - \sigma/\eta_1)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

for et Burgers materiale, se afsnit 25.3.1 i [1].

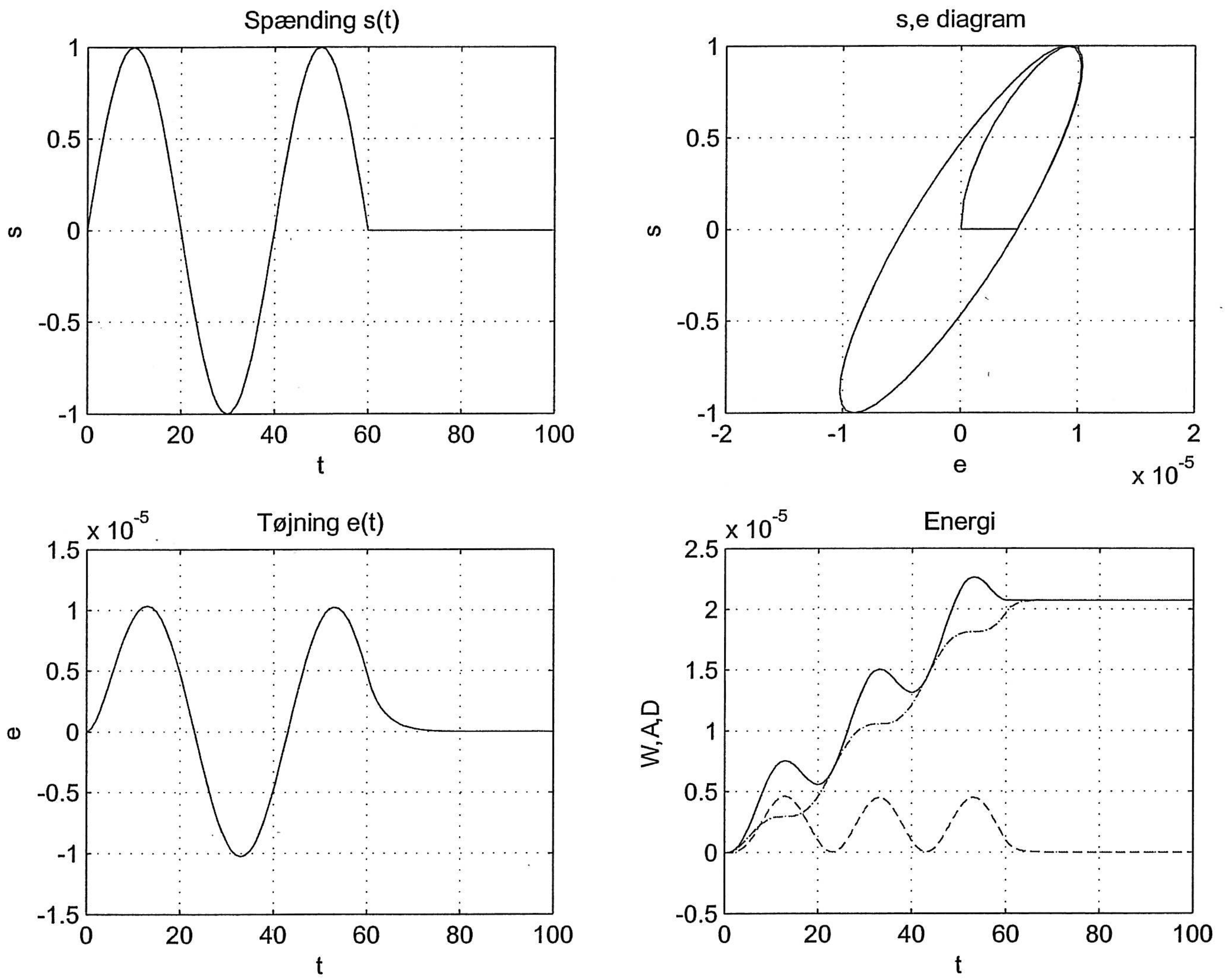
I figurerne 1-3 er vist spændingens variation med tiden, tøjningens variation med tiden, spændingens variation med tøjningen samt den totale energis, den elastiske energis og dissipationens variation med tiden for tre viskoelastiske modeller: Et Maxwell materiale, et Kelvin-Voigt materiale og en model, hvor to Kelvin-Voigt elementer er anbragt i serie. I figurerne er signaturen for $W-$, for $A - -$ og for $D - \cdot$


Spænding s(t)
s
t
s,e diagram
s
e
x 10^-5
Tøjning e(t)
x 10^-5
e
t
Energi
x 10^-5
W,A,D
t

Figur 1.


Spænding s(t)
s
t
s,e diagram
s
e
x 10^-5
Tøjning e(t)
x 10^-5
e
t
Energi
x 10^-5
W,A,D
t

Figur 2.



Spænding s(t)
s
t
s,e diagram
s
e
x 10^-5
Tøjning e(t)
x 10^-5
e
t
Energi
x 10^-5
W,A,D
t

Figur 3.

Ovennævnte materialemodeller er viskoelastiske, men også for elastoplastiske modeller fører udtrykket $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{\sigma} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \dot{A} + \dot{D}$ til en konstitutiv ligning. Betragtes således et lineærelastisk element i serie med et hærdnende plastisk element har man

$$\begin{aligned} A &= \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma}/2 \\ \dot{D} &= \underset{\sim}{\sigma} : \partial f/\partial\underset{\sim}{\sigma}\ \partial f/\partial\underset{\sim}{\sigma} : \dot{\sigma}/m \end{aligned} \tag{7}$$

hvor $m = -\partial f/\partial\underset{\sim}{\sigma} : d\underset{\sim}{\kappa}/d\underset{\sim}{\varepsilon} o \partial f/\partial\underset{\sim}{\kappa}$

se afsnit 33 i [1].

Forholdene bliver noget anderledes, hvis man anbringer de to elementer, det elastiske element og det plastiske element, parallelt. Udtrykket (2) fører ikke umiddelbart til en konstitutiv ligning i dette tilfælde. I stedet for en flydebetingelse udtrykt ved spændinger må man benytte en flydebetingelse udtrykt ved tøjninger, og i stedet for de virkelige (fysiske) energier og dissipation må man benytte de tilsvarende komplementære størrelser.

Vi har

flydebetingelsen $F(\underset{\sim}{\varepsilon}^D, \underset{\sim}{K}) = 0$ i stedet for $f(\underset{\sim}{\sigma}^D, \underset{\sim}{\kappa}) = 0$

hærdningsparametern $\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{\sigma}^D)$ i stedet for $\underset{\sim}{\kappa}(\underset{\sim}{\varepsilon}^D)$

Tilbage er blot spørgsmålet om, hvad man skal sætte i stedet for flydeloven, som giver en relation mellem dissipative tøjninger $\underset{\sim}{\varepsilon}^D$ og spændinger $\underset{\sim}{\sigma}^D$ i det plastiske element.

Som anført i [2] fører en antagelse om stationær effekt $\delta\dot{W} = \delta\sigma^D : \dot{\varepsilon}^D = 0$ ved en variation af spændinger på flydefladen $f(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$ til den associerede flydelov eller normalitetsbetingelsen. Man kan derfor antage, at den komplementære effekt $\dot{C} = \underset{\sim}{\varepsilon}^D : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}^D$ er stationær, dvs. $\delta\dot{C} = \delta\underset{\sim}{\varepsilon}^D : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}^D = 0$, ved en variation af tøjningerne på flydefladen $F(\underset{\sim}{\varepsilon}) = 0$. Denne antagelse fører til en normalitetsbetingelse

$$\dot{\sigma}^D = \Lambda \partial F/\partial\underset{\sim}{\varepsilon}^D \tag{8}$$

som benyttes sammen med

konsistensbetingelsen $dF/d\alpha = \dot{F} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^D : \partial F/\partial\underset{\sim}{\varepsilon}^D - \Lambda M = 0$ hvor
$M = -\partial F/\partial\underset{\sim}{\sigma}^D : d\underset{\sim}{K}/d\underset{\sim}{\sigma}^D \partial F/\partial\underset{\sim}{K}$

den komplementære elastiske energi α i stedet for A, $(\dot{\alpha} = \dot{\underset{\sim}{\sigma}}^E : \underset{\sim}{\varepsilon}^E)$

den komplementære dissipation δ i stedet for D, $(\dot{\delta} = \dot{\underset{\sim}{\sigma}}^D : \underset{\sim}{\varepsilon}^D)$

For den elastoplastiske model med et lineærelastisk element anbragt parallelt med et plastisk element finder man

$$\alpha = \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}/2$$
$$\dot{\delta} = \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} : \partial F/\partial \underset{\sim}{\varepsilon} \; \partial F/\partial \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\varepsilon}/M \tag{9}$$

Af udtrykket for den komplementære energi

$$\underset{\sim}{\dot{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \dot{\alpha} + \dot{\delta} \tag{10}$$

fås den konstitutive ligning

$$\underset{\sim}{\dot{\sigma}} = \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} : (\underset{\sim}{C} + \partial F/\partial \underset{\sim}{\varepsilon} \partial F/\partial \underset{\sim}{\varepsilon}/M) \tag{11}$$

[1] A. Rathkjen: Kontinuummekanik, 1999/2001

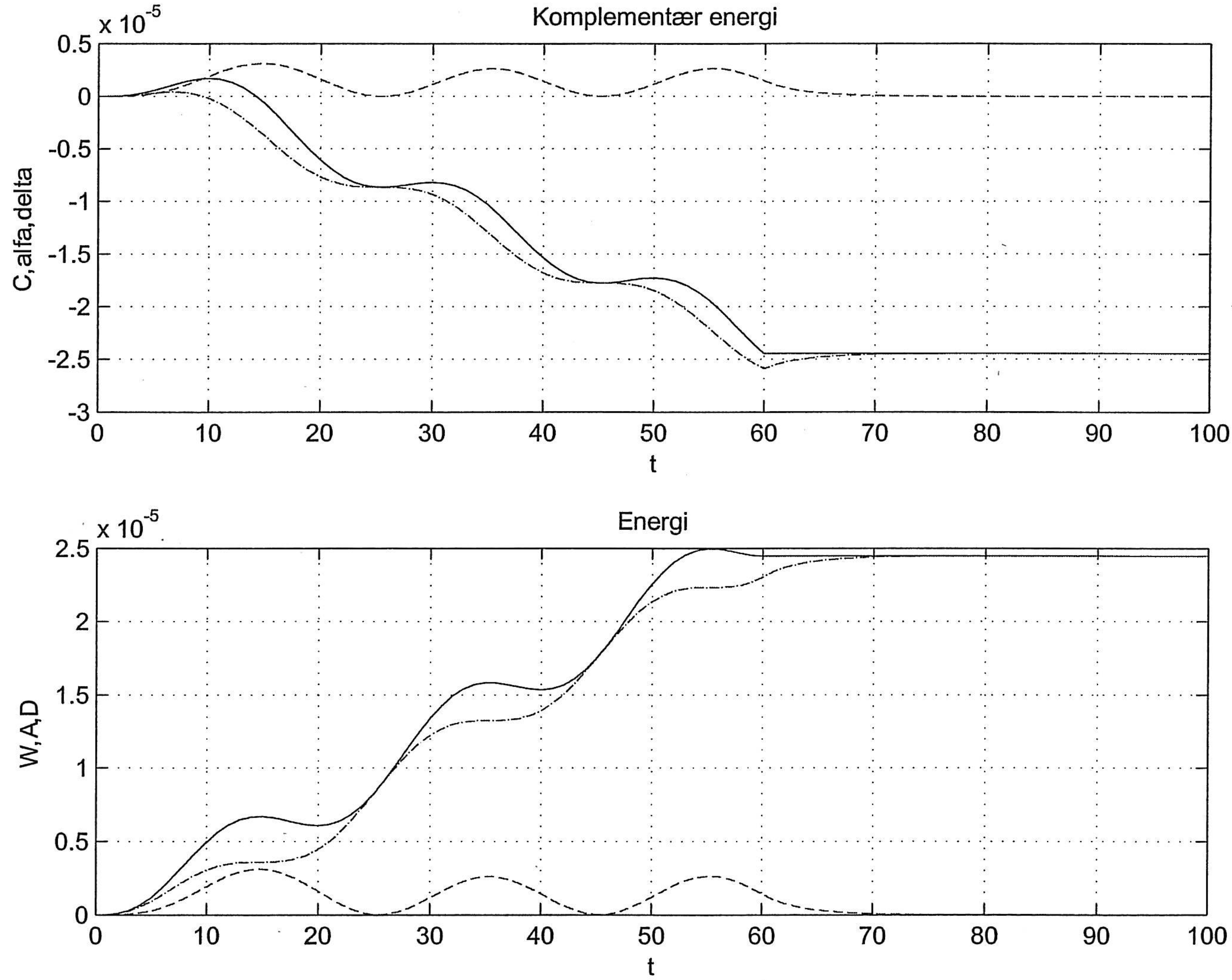
[2] R.v. Mises: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, ZAMM, Bd. 8, 1928, 161-185

Noter

1) Såvel materialeparametre som tøjninger og spændinger ændres ved temperaturændringer, hvilket kan have stor betydning for især dissipative materialer.

2) Selv om den komplementære energi har samme dimension som energi, er der ikke tale om nogen fysisk størrelse (se også Oravas & McLean: Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics in Applied Mechanics Reviews, vol 19, no 11, p 921, 1966).

   Variationen med tiden af de komplementære størrelser C, α og δ er vist i figur 4 for et Kelvin-Voigt materiale sammen med variationen af de fysiske størrelser W, A og D.


x 10^-5
Komplementær energi
C,alfa,delta
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
t
x 10^-5
Energi
W,A,D
2.5
2
1.5
1
0.5
0
t

Figur 4.